Regressão Júlia

Semana 3

Sistemas lineares e matrizes

ENEM

1. Equações

Uma **equação** é uma **igualdade matemática** que contém uma **incógnita** (ou variável), ou seja, um valor desconhecido que queremos descobrir. Resolver uma equação significa encontrar o valor da incógnita que **torna a igualdade verdadeira**.

Exemplo 1

(UEAAM) Uma pequena empresa que fabrica camisetas verificou que o lucro obtido com a venda de seus produtos obedece à função L(x) = 75x – 3000, sendo L(x) o lucro em reais e x o número de camisetas vendidas, para 40 < x ≤ 120. Para que o lucro da empresa chegue a R$ 4.000,00, o menor número de camisetas a serem vendidas é:

Solução

$$75x - 3000 = 4000$$

$$75x = 4000 + 3000 \Rightarrow 75x = 7000 \Rightarrow x = \frac{7000}{75} = \frac{280}{3} \approx 93{,}33$$

Logo 94 camisetas.

Exemplo 2

Uma fábrica de panelas opera com um custo fixo mensal de R$ 9 800,00 e um custo variável por panela de R$ 45,00. Cada panela é vendida por R$ 65,00. Seja x a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita.

A soma dos algarismos de x é:

Solução

$$R(x) = 65x$$

$$C(x) = 9800 + 45x$$

$$L(x) = R(x) - C(x) = 65x - (9800 + 45x) = 20x - 9800$$

$$L(x) = 0{,}2 \cdot R(x) = 0{,}2 \cdot 65x = 13x$$

$$20x - 9800 = 13x$$

$$20x - 13x = 9800 \Rightarrow 7x = 9800 \Rightarrow x = \frac{9800}{7} = 1400$$

Soma dos algarismos 1+4+0+0=5

Exemplo 3

(Enem 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

Solução

A despesa pode ser escrita de duas formas de acordo com o valor x que será pago por cada uma das 55 pessoas no acerto final. Nesse acerto, a despesa (D) pode ser escrita por D = 55x.

No acerto inicial, cada uma das 50 pessoas estava pagando (x – 7) reais e estava faltando 510 reais para completar o valor da despesa, assim D = 50 (x – 7) + 510. Igualando-se às duas equações e realizando a distributiva, tem-se que:

50x – 350 + 510 = 55x.
5x = 160
x = 32 reais

2. Sistemas de Equações

Um sistema de equações é um conjunto de duas ou mais equações com duas ou mais variáveis. A solução do sistema é o conjunto de valores que satisfazem simultaneamente todas as equações.

Exemplo 1

(ENEM) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca **X** é o dobro do número de carros roubados da marca **Y**, e as marcas **X** e **Y** juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca **Y** é:

A) 20
B) 30
C) 40
D) 50
E) 60

Solução

$$x = 2y$$

$$x + y = 90$$

$$2y + y = 90 \Rightarrow 3y = 90 \Rightarrow y = \frac{90}{3} = 30$$

Exemplo 2

Em um clube, há dois tipos de público, os sócios e os não sócios. Durante o evento da virada de ano, o clube decidiu fazer uma festa em que os sócios pagariam R$ 50,00 para participar e os não sócios pagariam R$ 120,00. Sabendo que no evento havia um total de 300 pessoas e que foram arrecadados R$ 22.700,00, o número de sócios e não sócios que foram à festa é de, respectivamente,

A) 210 e 90.

B) 190 e 110.

C) 180 e 120.

D) 150 e 150.

E) 200 e 100.

Solução

$$\begin{cases} 50x + 120y = 22700 \\ x + y = 300 \end{cases}$$

Resolvendo por substituição temos:

x = 300 – y

Substituindo na primeira equação temos:

50 (300 – y) + 120 y = 22700

15000 – 50y + 120y = 22700

70y = 22700 – 15000

70y = 7700

y = 7700 : 70

y = 110

Considerando que havia 110 não sócios, o número de sócios é igual a 300 – 110 = 190.

3. Sistemas com Três Variáveis (Escalonamento)

Sistemas de equações que possuem três equações distintas com variáveis comuns.

Exemplo 2

Encontre a solução para o seguinte sistema de três equações com três incógnitas pelo método de substituição:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 3x + 5y + 4z = 1 \\ 5x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

Solução

Para escalonarmos o sistema precisamos cancelar os termos 3x, 5x e 2y.

Vamaos então multiplicar a primeira linha -3, somar com a Segunda linha a substituí-la, em seguida multiplicar a primeira linha novamente por -5 somar com a teceira e substituíla:

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= -4 \\
-y + 5z &= 13 \\
-8y + 14z &= 26
\end{aligned}
$$

Agora multiplicamos a segunda linha por –8, somamos com a terceira e a substituimos:

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= -4 \\
-y + 5z &= 13 \\
-26z &= -78
\end{aligned}
$$

Agora definimos o z, em seguida o y depois o x.

$$-26z = -78 \Rightarrow z = 3$$

Substituir z por 3 na Segunda equação:

$$-y + 5z = 13 \Rightarrow -y + 5 \cdot 3 = 13 \Rightarrow -y + 15 = 13 \Rightarrow -y = -2 \Rightarrow y = 2$$

Substituir z por 3 e y por 2 na primeira equação:

$$x + 2y - 3z = -4 \Rightarrow x + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -4 \Rightarrow x + 4 - 9 = -4 \Rightarrow x - 5 = -4 \Rightarrow x = 1$$

Exemplo 2

(IFPE) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, caderno e lápis. As três ofertas eram:

1ª) 5 canetas, 4 cadernos e 10 lápis por R$ 62,00;

2ª) 3 canetas, 5 cadernos e 3 lápis por R$ 66,00;

3ª) 2 canetas, 3 cadernos e 7 lápis por R$ 44,00.

Para comparar os preços unitários dessa papelaria com outras do comércio, o Sr. Ricardo calculou os preços de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é

A) R$ 20,00.

B) R$ 18,00.

C) R$ 16,00.

D) R$ 14,00.

E) R$ 12,00.

Solução

Veja o sistema correspondente:

$$5x + 4y + 10z = 62$$
$$3x + 5y + 3z = 66$$
$$2x + 3y + 7z = 44$$

Atenção questões que se pede soma das variáveis, geralmente a questão já é criada para uma solução sem a necessidade de escalonamento como neste caso:

Vamos somar a primeira e a Segunda linha e subtrair este resultado da Terceira e teremos:

$$6x + 6y + 6z = 84$$

Dividindo tudo por temos:

$$x + y + z = 14$$

Resposta D

4. Sistemas Lineares

Um sistema linear é aquele em que todas as equações são de 1º grau.

Classificação:

• Sistema possível e determinado (SPD): uma única solução

• Sistema possível e indeterminado (SPI): infinitas soluções

• Sistema impossível (SI): sem solução

Exemplo

Classifique os sistemas de equações a seguir

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 6x + 9y = 30 \end{cases}$

Multiplicando a primeira linha por -3 e somando as equaões, temos:

$$0 = 0$$

Isto é o sistema é SPI (Sistema possível e inderterminador possuindo infinitas soluções, as retas são coicidentes.

b) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ -3x + 6y = 30 \end{cases}$

Multiplicando a primeira linha por 3 e somando com a Segunda linha, temos:

$$0 = 51$$

Como obtivemos um absurdo matemático, logo o sistema é impossível e as retas são paralelas.

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x + 8y = 20 \end{cases}$

Multiplicando a primeira linha por -3 e somando com a segunda, temos:

$$-y = -4$$

Logo é possível deifnir a solução e o sistema é possível e determinado.

5. Matrizes

Matriz é uma tabela organizada em linhas e colunas que pode representar um sistema linear ou organizar dados numéricos.

5.1 Ordem da Matriz

A ordem é dada por número de linhas × número de colunas.

5.2 Matriz Genérica

Matriz genérica de ordem m × n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$

5.3 Tipos de Matrizes

• Matriz Linha: 1 linha

$$\mathbf{B} = [\,2\ 4\ 6\,]$$

• Matriz Coluna: 1 coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

• Matriz Quadrada: m = n (quantidade linhas e colunas iguais)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo de matriz quadrada de ordem 3.

• Matriz Diagonal: elementos fora da diagonal são zero

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

• Matriz Identidade: diagonal principal com 1, resto 0

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade de ordem 4.

• Matriz Nula: todos os elementos são zero

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Matriz Transposta: troca linhas por colunas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5.4 Notação

A = [a_{ij}]: elemento na linha i e coluna j

1. Igualdade de Matrizes

Duas matrizes AAA e BBB são **iguais** se:

- Têm **a mesma ordem**
- Seus **elementos correspondentes** são iguais:

2. Adição de Matrizes

Só é possível **somar matrizes de mesma ordem**.
A soma é feita **elemento a elemento**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 3+7 \\ 2+0 & 4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Subtração de Matrizes

Também só é possível entre matrizes de mesma ordem.

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-5 & 3-7 \\ 2-0 & 4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Multiplicação de uma Matriz por um Número (Escalar)

Multiplicamos **todos os elementos** da matriz por esse número:

$$k = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

5. Multiplicação de Matrizes

Condição: só é possível multiplicar duas matrizes Am×n·Bn×p, o tipo da matriz resultado é mxp. O número de **colunas da primeira** deve ser igual ao número de **linhas da segunda**.

Exemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ordem } 2 \times 3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \quad (\text{ordem } 3 \times 2)$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11) & (1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12) \\ (4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11) & (4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

(ENEM) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco **i** para o banco **j** durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

Solução

A soma dos elementos da linha i dará a quantidade total de transferências do banco i.
Linha 1 (banco 1): 0 + 2 + 0 + 2 + 2 = 6
Linha 2 (banco 2): 0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3
Linha 3 (banco 3): 1 + 2 + 0 + 1 + 1 = 5
Linha 4 (banco 4): 0 + 2 + 2 + 0 + 0 = 4
Linha 5 (banco 5): 3 + 0 + 1 + 1 + 0 = 5
Logo, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco 1

Exemplo 2

2)(ENEM) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

A) segunda-feira.

B) terça-feira.

C) quarta-feira.

D) quinta-feira.

E) sexta-feira.

Solução

O somatório das colunas da respectivamente: 11,10,10,10,10. Assim, segunda-feira é a maior soma.

Exemplo 3

(Uerj — adaptada) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia (de manhã, de tarde e de noite), durante cinco dias. Cada elemento aij da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Julgue as afirmativas a seguir:

I - No momento a_{21}, o paciente estava com a temperatura de 36,1.

II - As temperaturas do momento a_{33} e do momento a_{21} são iguais.

III - No momento a35, a temperatura era de 39,2.

A ordem correta é:

A) V V V

B) V F V

C) F V V

D) F F V

E) V V F

Solução

I - Verdadeira

O termo que ocupa a 2ª linha e 1ª coluna de fato é 36,1.

II - Verdadeira

As duas temperaturas são iguais a 36,1.

III - Verdadeira

O termo que está na 3ª linha e 5ª coluna é 39,2.

Exemplo 4

(UFRGS) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados em um restaurante. A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P_1, P_2 e P_3.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{array} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_2 \end{array}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3 é:

Solução

Calcularemos o produto entre as matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3 + 2 \\ 1 + 6 + 2 \\ 2 + 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Questões de vestibulares

1)(ENEM) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco **i** para o banco **j** durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

A) 1.

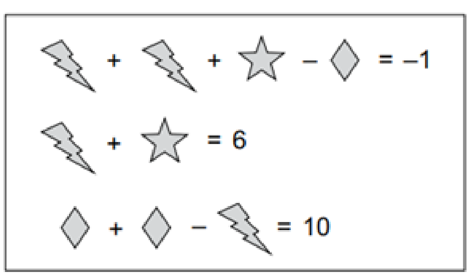
B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

2) Analise a seguinte imagem, utilizada pelo professor Tales em uma aula de sistemas lineares.



Se cada uma das três figuras diferentes que aparecem na imagem corresponde a um número inteiro, então,  será igual a

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

3)(ENEM) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5) mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefício, *design*, desempenho da bateria e tela, representados por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz **A**, em que cada elemento a_{ij} significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_i no item I_j. A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

$$A = \begin{matrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{matrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o

A) T_1.

B) T_2.

C) T_3.

D) T_4.

E) T_5.

4)(ENEM) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4 x 4 e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir:

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

5)(ENEM) Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1,2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ii} considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está apresentada a matriz com os dados da pesquisa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

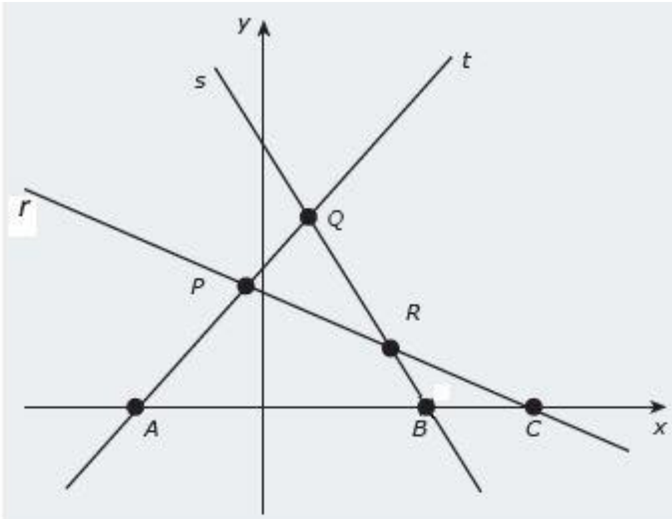
Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

6)(ENEM) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca **X** é o dobro do número de carros roubados da marca **Y**, e as marcas **X** e **Y** juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca **Y** é:

A) 20
B) 30
C) 40
D) 50
E) 60

7)(ENEM) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

A) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

B) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

C) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

D) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

E) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

8)(Enem 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos

b) 360 tijolos

c) 400 tijolos

d) 480 tijolos

e) 600 tijolos

9) Os irmãos Arthur e Breno foram a uma lanchonete. Arthur pediu 2 copos de suco e 1 coxinha, pagando R$ 12,00. Já Breno pediu 1 copo de suco e 3 coxinhas, pagando R$ 15,00.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir:

I - O copo de suco custa menos do que a coxinha.
II - A diferença de preço entre o copo de suco e a coxinha é de R$ 0,60.
III - A coxinha custa R$ 3,60.
IV - O copo de suco custa R$ 4,60.

Marque a alternativa correta.

a) Todos os itens são verdadeiros.
b) Apenas os itens I e II são verdadeiros.
c) Apenas os itens II e III são verdadeiros.
d) Apenas os itens I, III e IV são verdadeiros.

10) Na loja de semi-jóias de Juliana foram vendidos em uma semana x colares e y pulseiras, totalizando 37 peças e um faturamento de R$ 4.504,00. Se cada colar custa R$ 158,00 e cada pulseira R$ 97,00, quantas peças de cada foram vendidas?

a) 20 colares e 17 pulseiras.
b) 15 colares e 22 pulseiras.
c) 18 colares e 19 pulseiras.
d) 10 colares e 27 pulseiras.

11)(CEFET)A criptografia é uma técnica de segurança que transforma dados em um código secreto. No quadro abaixo, temos uma maneira conhecida como a Cifra de César, na qual a palavra CONCURSO teve suas letras substituídas por números.

C	O	N	C	U	R	S	O
7	19	18	7	25	22	23	19

Uma maneira de aumentar o nível de segurança dessa mensagem já codificada consiste em escrevêla na forma de uma matriz A_{2x4} com os quatro primeiros números na primeira linha e os quatro últimos na segunda, na ordem em que aparecem. A maneira para aumentar a segurança consiste em multiplicar uma matriz inversível com essa matriz *A.*

Considerando a matriz inversível $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, e multiplicando-a com a matriz A, a mensagem passa a ter nova codificação apresentada em

A

-7	38	-18	14	-25	44	-23	38

B

17	38	36	7	25	22	23	19

C

39	60	59	33	-43	-25	-28	-31

D

32	41	31	26	-18	-3	-5	-12

E

-10	-4	-2	-16	24	30	40	30

12) Os elementos de uma matriz P quadrada de ordem 3 x 3 são dados por aij, onde:

2i + j, se i ≠ j

1, se i = j

Determine a soma de $\mathbf{a_{21} + a_{23} - a_{32}}$

- **A)** 4
- **B)** 5
- **C)** 6
- **D)** 8

13) Em um clube, há dois tipos de público, os sócios e os não sócios. Durante o evento da virada de ano, o clube decidiu fazer uma festa em que os sócios pagariam R$ 50,00 para participar e os não sócios pagariam R$ 120,00. Sabendo que no evento havia um total de 300 pessoas e que foram arrecadados R$ 22.700,00, o número de sócios e não sócios que foram à festa é de, respectivamente,

A) 210 e 90.

B) 190 e 110.

C) 180 e 120.

D) 150 e 150.

E) 200 e 100.

14) (Enem 2018) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram 3 bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes e muitos compraram apenas 1. O total de alunos que comprou 1 único bilhete era 20% do

número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente 1 bilhete?

A) 34

B) 42

C) 47

D) 48

E) 79

15) (Saeb 2011) Um teste é composto por 20 questões classificadas em verdadeiras ou falsas. O número de questões verdadeiras supera o número de questões falsas em 4 unidades. Sendo x o número de questões verdadeiras e y o número de questões falsas, o sistema associado a esse problema é:

A) $\begin{cases} x - y = 20 \\ x = 4 - y \end{cases}$

B) $\begin{cases} x - y = 20 \\ y = 4x \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 4y \end{cases}$

D) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$

16) Quatro números naturais A, B, C e D são tais que, a soma desses quatro números é igual a 63, B é 200% superior ao valor de D, C é 50% superior ao valor de B, D é 50% inferior ao valor de A e por fim temos que A = B − D. Com base nas referências acima podemos concluir que B + D é igual a:

a) 30
b) 33
c) 39
d) 24

17) (Enem 2010) O Salto Triplo é uma modalidade do

atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: www.cbat.org.br (adaptado).

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

a) 4,0 m e 5,0 m.

b) 5,0 m e 6,0 m

c) 6,0 m e 7,0 m.

d) 7,0 m e 8,0 m.

e) 8,0 m e 9,0 m.

18) (Enem 2010) Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor

solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo.

Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

a) 476

b) 675

c) 923

d) 965

e) 1 538

19)(Enem 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00.

b) R$ 17,00.

c) R$ 22,00.

d) R$ 32,00.

e) R$ 57,00.

20) (Enem 2004) Em quase todo o Brasil existem restaurantes em que o cliente, após se servir, pesa o prato de comida e paga o valor correspondente, registrado na nota pela balança. Em um restaurante desse tipo, o preço do quilo era R$ 12,80. Certa vez a funcionária digitou por engano na balança eletrônica o valor R$ 18,20 e só percebeu o erro algum tempo depois, quando vários clientes já estavam almoçando. Ela fez alguns cálculos e verificou que o erro seria corrigido se o valor incorreto indicado na nota dos clientes fosse multiplicado por

a) 0,54

b) 0,65

c) 0,70

d) 1,28

21) Suponha que o orçamento de uma confeitaria foi passado a um comprador do seguinte modo:

I - 4 balas, 8 bombons e 12 chocolates custam R$ 36,00;

II - 10 balas, 5 bombons e 5 chocolates custam R$ 25,00, e

III - 12 balas, 3 bombons e 6 chocolates custam R$ 27,00

Sabendo que todas as balas, bombons e chocolates são do mesmo tipo, é correto afirmar que o prego de um chocolate é igual a:

AR$ 0,50

BR$ 1,00

C R$ 1,50

D R$ 2,00

E R$ 2,50

Gabarito

1-a
2-d
3-d
4-e
5-e
6-b
7-d
8-d
9-c
10-b
11-c
12-a
13-b
14-d
15-d
16-d
17-d
18-c
19-d
20-c
21-d